

以 $f(x) = x^2 - x + 2$.

(2) $g(x) = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{2}{x} - 1$, $g(x)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 证明如下:
任取 $x_1, x_2 \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,
 $g(x_1) - g(x_2) = x_1 + \frac{2}{x_1} - 1 - (x_2 + \frac{2}{x_2} - 1) = x_1 - x_2 + \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{(x_1 - x_2)x_1x_2}{x_1x_2} + \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 2)}{x_1x_2}$,

其中 $x_1 - x_2 < 0$, $x_1x_2 - 2 > 0$, $x_1x_2 > 0$, 所以 $g(x_1) - g(x_2) < 0$, $g(x_1) < g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增.

9. 【解】(1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 证明如下:

令 $x = y = 1$, 由已知可得, $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, 则 $f(1) = 0$.

由已知可得, $f(xy) - f(x) = f(y)$.

$\forall x_1, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$,

$f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$, 即

$f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 令 $x = y = 2$, 由已知可得 $f(4) = 2f(2) = 4$. 又 $f\left(\frac{8}{x}\right) - f(x-1) =$

$f\left(\frac{8}{x(x-1)}\right)$, 不等式化为 $f\left(\frac{8}{x}\right) - f(x-1) = f\left(\frac{8}{x(x-1)}\right) < 4 = f(4)$.

由(1)知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\frac{8}{x(x-1)} > 4$. 又 $\frac{8}{x} > 0$, $x - 1 > 0$, 所以 $x > 1$, 所以有 $x(x-1) < 2$, 整理可得 $x^2 - x - 2 < 0$, 解得 $-1 < x < 2$, 所以 $1 < x < 2$.

故不等式的解集为 $(1, 2)$.

10. 【解】(1) $f(x) < ax \Leftrightarrow ax^2 - (a-1)x - 2 < ax \Leftrightarrow ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$.

当 $a = 0$ 时, 原不等式等价于 $x - 2 < 0$, 解得 $x < 2$;

当 $a \neq 0$ 时, 因为 $\Delta = (2a-1)^2 + 8a = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, $a > -\frac{1}{2}$, 所以 $\Delta = (2a+1)^2 > 0$, $2a+1 > 0$, 令 $ax^2 - (2a-1)x - 2 = 0 \Leftrightarrow (ax+1)(x-2) = 0$ ($a \neq 0$), 解得 $x_1 = -\frac{1}{a}$, $x_2 = 2$,

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $-\frac{1}{a} > 2$, 所以不等式 $ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$;

当 $a > 0$ 时, $-\frac{1}{a} < 0 < 2$, 所以不等式 $ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{a}, 2\right)$.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, $f(x) < ax$ 的解集为 $(-\infty, 2)$;

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $f(x) < ax$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x) < ax$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{a}, 2\right)$.

(2) 因为 $a > 0$, 所以函数 $f(x) = ax^2 - (a-1)x - 2$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = \frac{a-1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$.

当 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \leq -\frac{1}{2}$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3a-10}{4} = -\frac{9}{4}$,

解得 $a = \frac{1}{3} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 满足题意;

当 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > -\frac{1}{2}$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\right) =$

$-\frac{a^2+6a+1}{4a} = -\frac{9}{4}$, $a^2 - 3a + 1 = 0$,

解得 $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} >$

$\frac{1}{2}$, 所以 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

综上所述, $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

985 冲刺专题四 求二次函数的最值

1. D 【解析】 $\because f(x) = x^2 + 3x + 2$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{3}{2}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-5, -\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减,

在 $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ 上单调递增.

\therefore 当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. 又 $\because (-5, 5)$ 为开区间, $\therefore f(x)$ 无最大值. 故 D 正确.

2. C 【解析】因为函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 5 = -(x-1)^2 + 6$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 6, 又 $f(0) = f(2) = 5$, 所以 $1 \leq m \leq 2$.

则实数 m 的取值范围是 $[1, 2]$.

3. C 【解析】因为二次函数 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ 的图象的对称轴为 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$, 开口向下, 所以 $x = t$ 或 $x = t+2$ 时取得函数的最小值.

由 $-x^2 + 2x + 3 = -5$, 可得 $x = -2$ 或 $x = 4$.

当 $t = -2$ 时, $t+2 = 0$, $y_{\max} = 3$;

当 $t+2 = -2$ 时显然不合题意;

当 $t = 4$ 时显然不合题意;

当 $t+2 = 4$ 时, $t = 2$, $y_{\max} = 3$. 所以 m 等于 3.

4. A 【解析】由题意知 $a < b$. 当 $ab < 0$ 时, $t = 0$, 则 $b^2 \leq 1$, $a^2 \leq 1$, 即 $b \leq 1$,

$$a \geq -1.$$

即当 $a = -1, 0 < b \leq 1$ 或者 $b = 1, -1 \leq a < 0$ 时, $1 < b - a \leq 2$, 则 $b - a$ 有最大值 2;

当 $ab \geq 0$ 时, 不妨设 $0 \leq a < b$, 此时 $b^2 = t + 1 \geq 1, a^2 = t \geq 0$ 则 $b^2 - a^2 = 1$,

所以 $b - a = \frac{1}{a + b}$, 而 $a = \sqrt{t} \geq 0, b =$

$$\sqrt{t+1} \geq 1, b - a = \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}},$$

由 $\frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$ 单调递减可得当 $t = 0$

时, $b - a = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$ 有最大值 1, 无

最小值.

综上所述, $b - a$ 有最大值 2, 无最小值.

5. $[3, +\infty)$ 【解析】因为函数 $f(x) = x^2 - 4x + 8$ 的图象的对称轴为 $x = 2$, 开口向上. 所以, 要使在 $x = a$ 处取得最大值, 只需 $\begin{cases} |a - 2| \geq |2 - 1|, \\ a > 1, \end{cases}$ 解得 $a \geq 3$, 即实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

6. $\frac{3}{8}$ 【解析】根据题意可知 $a \neq 0$, 因为 $a = 0$ 时不存在最值. $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = -1$.

(1) 若 $a < 0$, 则函数图象开口向下, 函数在 $[1, 2]$ 上单调递减. 当 $x = 1$ 时, 函数取得最大值 4, 即 $f(1) = a + 2a + 1 = 4$, 解得 $a = 1$ (舍).

(2) 若 $a > 0$, 函数图象开口向上, 函数在 $[1, 2]$ 上单调递增, 当 $x = 2$ 时, 函数取得最大值 4, 即 $f(2) = 4a + 4a + 1 = 4$, 解得 $a = \frac{3}{8}$.

综上所述, $a = \frac{3}{8}$.

7. $\frac{9}{5}$ 【解析】由题知函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x = t$, 又函数 $f(x)$

在 $[2, 5]$ 上为单调函数, 所以 $t \leq 2$ 或 $t \geq 5$.

当 $t \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递增, 则 $f(x)_{\max} = f(5) = 26 - 10t = 8$, 解得 $t = \frac{9}{5}$;

当 $t \geq 5$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f(2) = 5 - 4t = 8$, 解得 $t = -\frac{3}{4} < 5$, 故不成立.

8. $[1, \sqrt{2}]$ 【解析】函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 1$ 的图象的对称轴为 $x = t$. 由于函数 $f(x) = x^2 - 2tx + 1$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 所以 $t \geq 1$. 故当 $x \in [0, t + 1]$ 时, $f(x)_{\min} = f(t) = -t^2 + 1, f(x)_{\max} = f(0) = 1$, 故由 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq 2$ 得 $1 - (-t^2 + 1) \leq 2, \therefore -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, 结合 $t \geq 1$, 可得实数 t 的取值范围是 $[1, \sqrt{2}]$.

9. 【解】(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 而 $f(0) = 0, f(x+1) = f(x) + x + 1$, 则 $\begin{cases} c = 0, \\ a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + bx + c + x + 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \\ c = 0, \end{cases} \therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x =$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

$\therefore -1 \leq x \leq 1, \therefore f(x)$ 在 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 递减, 在 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增.

$$\text{故 } f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, f(x)_{\max} = f(1) = 1.$$

10. 【解】(1) $\because f(2+x) = f(2-x), \therefore$ 函数图象的对称轴为 $x = 2, \therefore$ 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c,$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2 \text{ ①. 又 } \because f(x) > 0 \text{ 的解集}$$

为 $(-2, c), \therefore ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根是 $-2, c$, 且 $a < 0$, 即 $4a - 2b + c = 0$ ②, $ac^2 + bc + c = 0$ ③,

联立 ① ② ③, 解得 $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = 6$.

\therefore 函数的解析式为 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

(2) $f(x)$ 在区间 $[m, m+1]$ 的最大值记为 $h(m)$.

当 $m+1 < 2$, 即 $m < 1$ 时,

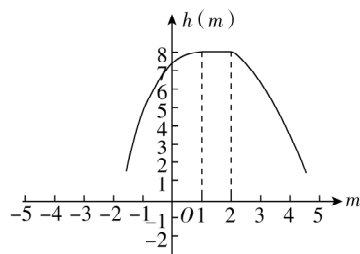
函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 在 $[m, m+1]$ 上是增函数, 函数的最大值为 $f(m+1) = -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{15}{2}$;

当 $m > 2$ 时, 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 在 $[m, m+1]$ 上是减函数, 函数的最大值为 $f(m) = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$;

当 $m \leq 2 \leq m+1$, 即 $1 \leq m \leq 2$ 时, 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 在 $[m, m+1]$ 上的最大值为 $f(2) = 8$.

$$\text{综上, } h(m) = \begin{cases} 8, & 1 \leq m \leq 2, \\ -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6, & m > 2, \\ -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{15}{2}, & m < 1, \end{cases}$$

函数 $h(m)$ 的图象为



所以函数 $h(m)$ 的最大值为 8.